الوحدة الأولى : الارتباط والانحدار

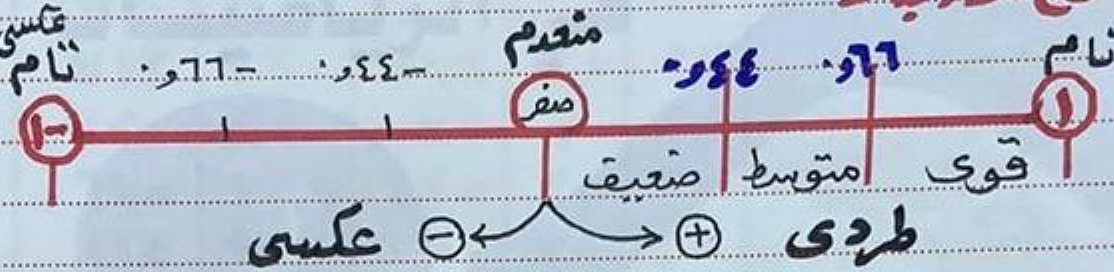
أولاً / الارتباط

تعريفه : تحديد نوع ودرجة العلاقة بين متغيرين

معامل الارتباط (ر)

هو مقياس كمي يقيس قوة الارتباط بين متغيرين

نوع الارتباط



معامل الارتباط الخطي لبيرسون

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مج س ص} - \text{مج س} \times \text{مج ص}}{\sqrt{\text{ن مج س}^2 - (\text{مج س})^2}\ \sqrt{\text{ن مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2}}$$

مثال ١ : أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه إذا كان :

مج س = ٩٢ ، مج ص = ٣٦ ، مج س ص = ٣٧٢

، مج س² = ١١٠٠ ، مج ص² = ٢٠٤ ، ن = ٨

الحل :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مج س ص} - \text{مج س} \times \text{مج ص}}{\sqrt{\text{ن مج س}^2 - (\text{مج س})^2} \times \sqrt{\text{ن مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2}}$$

$$= \frac{٨ \times ٣٧٢ - ٩٢ \times ٣٦}{\sqrt{٨ \times ١١٠٠ - (٩٢)^2} \times \sqrt{٨ \times ٢٠٤ - (٣٦)^2}} = -١$$

عكسي تام

مثال (٢): من بيانات الجدول الآتي

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه.

س	٢٠	٢٣	٢٤	٢٥	٢٨	٣٠
ص	٣٥	٣١	٣٠	٢٧	٢٩	٢٨

الحل:

ن = ٦ «عدد الخانات بالجدول»

$$ر = \frac{ن\,مجـ\,س\,ص - مجـ\,س \times مجـ\,ص}{\sqrt{ن\,مجـ\,س^2 - (مجـ\,س)^2} \times \sqrt{ن\,مجـ\,ص^2 - (مجـ\,ص)^2}}$$

س	ص	س²	ص²	س ص
٢٠	٣٥	٤٠٠	١٢٢٥	٧٠٠
٢٣	٣١	٥٢٩	٩٦١	٧١٣
٢٤	٣٠	٥٧٦	٩٠٠	٧٢٠
٢٥	٢٧	٦٢٥	٧٢٩	٦٧٥
٢٨	٢٩	٧٨٤	٨٤١	٨١٢
٣٠	٢٨	٩٠٠	٧٨٤	٨٤٠
١٥٠	١٨٠	٣٨١٤	٥٤٤٠	٤٤٦٠
مجـ س	مجـ ص	مجـ س²	مجـ ص²	مجـ س ص

$$ر = \frac{٦ \times ٤٤٦٠ - ١٥٠ \times ١٨٠}{\sqrt{٦ \times ٣٨١٤ - (١٥٠)^2} \times \sqrt{٦ \times ٥٤٤٠ - (١٨٠)^2}} = -٠٫٧٩$$

عكسي قوي

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

$$ر = ١ - \frac{٦\,مجـ\,ف^2}{ن(ن^2 - ١)}$$

مثال (٣): احسب معامل ارتباط الرتب بين س ، ص وحدد نوعه من بيانات الجدول التالي

س	١٠	٧	٨	٧	٦	٤
ص	٥	٨	٧	٩	٩	١٠

الحل....

س	ص	ر(س)	ر(ص)	ف	ف٢
١٠	٥	١	٦	-٥	٢٥
٧	٨	٣,٥	٤	-٠,٥	٠,٢٥
٨	٧	٢	٥	-٣	٩
٧	٩	٣,٥	٢,٥	١	١
٦	٩	٥	٢,٥	٢,٥	٦,٢٥
٤	١٠	٦	١	٥	٢٥
					٦٦,٥

س	ر	الترتيب النهائي	ص	ر	الترتيب النهائي
١٠	١	١	٥	٦	٦
٧	٣	٣,٥	٨	٤	٤
٨	٢	٢	٧	٥	٥
٧	٤	٣,٥	٩	٢	٢,٥
٦	٥	٥	٩	٣	٢,٥
٤	٦	٦	١٠	١	١

هامش للتوضيح ليس ضروري أن يكتبه الطالب

من الجدول: ن = ٦ ، مج ف٢ = ٦٦,٥ ∴ ر = ١ - $\frac{\text{٦ مج ف}^2}{\text{ن(ن}^2\text{-١)}}$

∴ ر = ١ - $\frac{\text{٦٦,٥} \times \cancel{\text{٦}}}{\cancel{\text{٦}}\text{(٣٦-١)}}$ = -٠,٩ عكسي قوي.

مثال ٤: من بيانات الجدول التالي احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان مبيناً نوعه

س	جيد جداً	ممتاز	جيد	جيد جداً	مقبول
ص	ممتاز	جيد جداً	مقبول	جيد جداً	مقبول

س	ص	ر(س)	ر(ص)	ف	ف٢
جيد جداً	ممتاز	٢,٥	١	١,٥	٢,٢٥
ممتاز	جيد جداً	١	٢,٥	-١,٥	٢,٢٥
جيد	مقبول	٤	٤,٥	-٠,٥	٠,٢٥
جيد جداً	جيد جداً	٢,٥	٢,٥	صفر	صفر
مقبول	مقبول	٥	٤,٥	٠,٥	٠,٢٥
					٥

الحل:

من الجدول: ن = ٥

مج ف٢ = ٥

∴ ر = ١ - $\frac{\text{٦ مج ف}^2}{\text{ن(ن}^2\text{-١)}}$

= ١ - $\frac{\text{٥} \times \text{٦}}{\text{٥} \times \text{٢٤}}$ = ٠,٧٥

← طردي قوي

ملحوظة: ① للتأكيد مج ف = صفر **ملحوظة** ② معامل بيرسون أدق من معامل سبيرمان لأنه يعتمد على القيم

الانحدار

هو أسلوب إحصائي يمكن بواسطته تقدير أحد المتغيرين بمعلومية الآخر

معادلة خط الانحدار

$$\boxed{ص = أ + ب\,س}$$

ب ← معامل الانحدار

$$ب = \frac{ن\,\sum س\,ص - \sum س \times \sum ص}{ن\,\sum س^{2} - (\sum س)^{2}} \quad ، \quad أ = \frac{\sum ص - ب\,\sum س}{ن}$$

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية - القيمة الانحدارية |

القيمة الجدولية: ص من الجدول، القيمة الانحدارية: ص من معادلة الانحدار

مثال ٥

من بيانات الجدول الآتي

س	١٠	١٢	١٥	١٢	١٤	٨
ص	٦	٨	٦	٦	٩	٥

أوجد:

١- معادلة خط الانحدار

٢- تنبأ بقيمة ص عندما س = ٧

٣- أوجد قيمة الخطأ عندما س = ٨

الحل:

من الجدول

ن = ٦

(عدد البيانات)

س	ص	س²	ص²	س ص
١٠	٦	١٠٠	٣٦	٦٠
١٢	٨	١٤٤	٦٤	٩٦
١٥	٦	٢٢٥	٣٦	٩٠
١٢	٦	١٤٤	٣٦	٧٢
١٤	٩	١٩٦	٨١	١٢٦
٨	٥	٦٤	٢٥	٤٠
٧١	٤٠	٨٧٣	٢٧٨	٤٨٤

$\sum$ س = ٧١

$\sum$ ص = ٤٠

$\sum$ س² = ٨٧٣

$\sum$ ص² = ٢٧٨

$\sum$ س ص = ٤٨٤

ب ≃ (ن مجـ س ص − مجـ س × مجـ ص) ÷ (ن مجـ س² − (مجـ س)²) = (٦ × ٤٨٤ − ٧١ × ٤٠) ÷ (٦ × ٨٧٣ − (٧١)²)

ب ≃ ٠٫٣٢٤٩

أ = (مجـ ص − ب مجـ س) ÷ ن = (٤٠ − ٠٫٣٢٤٩ × ٧١) ÷ ٦ ≃ ٢٫٨٢٢٣

(١) ∴ معادلة خط الانحدار هي ص = أ + ب س

يعني ص = ٢٫٨٢٢٣ + ٠٫٣٢٤٩ س

(٢) عندما س = ٧ ∴ ص = ٢٫٨٢٢٣ + ٠٫٣٢٤٩ × ٧

∴ ص ≃ ٥٫٠٩٦٦

(٣) عند س = ٨ ∴ ص = ٢٫٨٢٢٣ + ٠٫٣٢٤٩ × ٨

∴ ص ≃ ٤٫٨١٤٣ ← القيمة الانحدارية

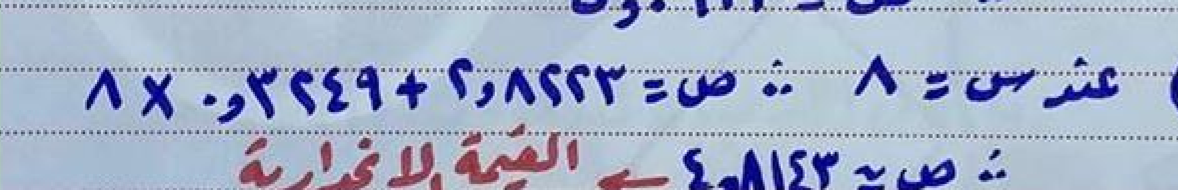
∴ مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة الانحدارية |

= | ٥ − ٤٫٨١٤٣ | ≃ ٠٫١٨٥٧

ملاحظات: (١) إذا كانت ب > ٠ ← نوع الارتباط طردي

ب < ٠ ← " " عكسي

(٢)



نوع الارتباط	طردي تام	عكسي تام	منعدم	طردي قوي	عكسي قوي

الباب الثاني : الاحتمال الشرطي - الأحداث المستقلة

مراجعة قوانين الاحتمال التي تم دراستها سابقاً

١) ل(أ) = $\frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ف)}}$ احتمال وقوع أ

٢) ل(أَ) = ١ - ل(أ) احتمال {نفي / عدم} أ

٣) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

القانون صحيح لو بدلناهم

∪ : أو - أى منهما - على الأقل - مصدر الحدث

∩ : و - ، - كلاهما معاً

٤) ل(أ ∩ بَ) = ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ ∩ ب) احتمال أ فقط - أ ونفي ب .

٥) ل(أَ ∪ بَ) = ١ - ل(أ ∩ ب) احتمال عدم وقوعهما معاً - أحدهما على الأكثر

ل(أَ ∩ بَ) = ١ - ل(أ ∪ ب) "عدم وقوع اى منهما"

٦) ل(أَ ∪ ب) = ل(أ - ب)َ = ل(أَ) + ل(أ ∩ ب)

احتمال عدم وقوع أ فقط (عدم وقوع أ بمفرده)

ملاحظات

١) أ ، ب متنافيان ⇐ ل(أ ∩ ب) = صفر

٢) أ ⊂ ب ⇐ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

، ل(أ - ب) = صفراً

٣) ل(أ) ∈ [٠ ، ١] ، ل(∅) = صفر ، ل(ف) = ١

الاحتمال الشرطي: إذا كان أ ، ب ⊂ ف فإن:

ل (أ | ب) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل (ب)}}$ ← احتمال التقاطع ← احتمال الثاني

وتنطق: احتمال أ بشرط ب

ملحوظة:
الحدث الأول يأتي بعد كلمة احتمال
الحدث الثاني يأتي بعد كلمة:
(علمًا بأن - إذا علم أن - بشرط - إذا كان ...)

مثال (١): إذا كان ل (أ) = ٣ر٠ ، ل (ب) = ٤ر٠ ،
ل (أ ∩ ب) = ٢ر٠ أوجد:

① ل (أ | ب) ② ل (ب | أ) ③ ل (أ | بَ)

الحل:

(١) ل (أ | ب) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل (ب)}}$ = $\frac{٢ر٠}{٤ر٠}$ = $\frac{١}{٢}$

(٢) ل (ب | أ) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل (أ)}}$ = $\frac{٢ر٠}{٣ر٠}$ = $\frac{٢}{٣}$

(٣) ل (أ | بَ) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{بَ)}}{\text{ل (بَ)}}$ = $\frac{١ر٠}{٦ر٠}$ = $\frac{١}{٦}$

تذكر أن:
ل (أ ∩ بَ)
= ل (أ) - ل (أ ∩ ب)
= ٣ر٠ - ٢ر٠
= ١ر٠

$\boxed{\text{ل (بَ) = ١ - ل (ب) = ٦ر٠}}$

مثال (٢): فصل دراسي به ٥٠ طالب فإذا كان ١٥ طالب منهم يدرسون الكيمياء ، ٢٥ طالب يدرسون الأحياء ، ١٠ طلاب يدرسون المادتين معًا أوجد احتمال أن يكون الطالب ممن يدرس: (١) الكيمياء بشرط الأحياء.
(٢) الأحياء إذا كان دارسًا للكيمياء.
(٣) الأحياء إذا علم أنه لا يدرس الكيمياء.

الحل: كيمياء ← أ ، أحياء ← ب ، كيمياء وأحياء أ ∩ ب

$ل(أ) = \frac{١٥}{٥٠}$ ، $ل(ب) = \frac{٢٥}{٥٠}$ ، $ل(أ \cap ب) = \frac{١٠}{٥٠}$

(١) $ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{١٠}{٥٠} \div \frac{٢٥}{٥٠} = ٠٫٤$

(٢) $ل(ب | أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} = \frac{١٠}{٥٠} \div \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٢}{٣}$

(٣) $ل(ب | أ') = \frac{ل(ب \cap أ')}{ل(أ')} = \frac{١٥}{٥٠} \div \frac{٣٥}{٥٠} = \frac{٣}{٧}$

تذكر أن

$ل(ب \cap أ')$

$= ل(ب) - ل(ب \cap أ)$

$= \frac{٢٥}{٥٠} - \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١٥}{٥٠}$

$ل(أ') = ١ - ل(أ)$

$= \frac{٣٥}{٥٠}$

الأحداث المستقلة:

يقال أن: أ ، ب حدثان مستقلان إذا كان

$ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

مثال (١): إذا كان $ل(أ) = ٠٫٦$ ، $ل(ب) = ٠٫٣$ ، $ل(أ - ب) = ٠٫٤٢$ أثبت أن أ ، ب حدثان مستقلان.

الحل: $ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$

$\therefore ٠٫٤٢ = ٠٫٦ - ل(أ \cap ب)$

$\therefore ل(أ \cap ب) = ٠٫٦ - ٠٫٤٢ = ٠٫١٨$

$\because ل(أ) \times ل(ب) = ٠٫٦ \times ٠٫٣ = ٠٫١٨$

$\therefore ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

$\therefore$ أ ، ب حدثان مستقلان.

مثال (١): إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان
ل(أ) = ٦ر٠ ، ل(ب) = ٣ر٠ أوجد :
① ل(أ ∩ ب) ② ل(أ ∪ ب) ③ ل(أ | ب)

الحل: ∵ أ ، ب مستقلان
① ∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٦ر٠ × ٣ر٠ = ١٨ر٠
② ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= ٦ر٠ + ٣ر٠ − ١٨ر٠ = ٧٢ر٠
③ ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}}$ = $\frac{١٨ر٠}{٣ر٠}$ = ٦ر٠

مثال ②: أطلق ضاربان قذيفة نحو هدف ما فإذا كان
ل(أ) = ٦ر٠ ، ل(ب) = ٥ر٠ أوجد احتمال إصابة
الهدف بقذيفة واحدة فقط.

الحل: ∵ إصابة الهدف من أحدهما لا يؤثر في الآخر
∴ أ ، ب مستقلان
∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٦ر٠ × ٥ر٠ = ٣ر٠
احتمال إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط
= ل(أ − ب) + ل(ب − أ) = ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)
= [ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)] − ل(أ ∩ ب)
= ٦ر٠ + ٥ر٠ − ٣ر٠ − ٣ر٠ = ٥ر٠

مثال (٤): كيس يحتوي على ٣ كرات حمراء ، ٥ كرات سوداء ، إذا سحبت كرتان الواحدة تلو الأخرى دون إحلال (إرجاع).

ما احتمال أن تكون :

(أ) الكرتان سوداوين؟

(ب) الأولى سوداء والثانية حمراء؟

(جـ) إحدى الكرتين حمراء والأخرى سوداء؟

الحل:

(أ) الأولى سوداء و الثانية سوداء

$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$

خلي بالك معايا:

و ← ∩ ← ×

الكسر الثاني في الضرب طرحنا منه ١ لأن السحب بدون إحلال

(ب) الأولى سوداء و الثانية حمراء

$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٧} = \frac{١٥}{٥٦}$

(جـ) الأولى حمراء والثانية سوداء أو الأولى سوداء والثانية حمراء

$\frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٧} + \frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٧} = \frac{١٥}{٢٨}$

لاحظ أن:

١) إذا كان أ ، ب مستقلان فإن ل(أ ∩ ب) = ل(أ)

٢) الحدثان المتنافيان يكونان مستقلين إذا وفقط إذا كان احتمال أحدهما = ٠ لأن ل(أ) × ل(ب) = ٠

الباب الثالث المتغير العشوائي المتقطع

تعريف: المتغير العشوائي المتقطع س هو دالة مجالها ف (فضاء العينة)
ومجالها المقابل ح ← الأعداد الحقيقية

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين
ف = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}
إذا كان المتغير العشوائي هو عدد الكتابات فإن
مدى المتغير العشوائي = {٠، ١، ٢}

ملحوظة: التجربة الواحدة يعرف عليها العديد من المتغيرات العشوائية

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي: هو جدول كما بالشكل

المدى ⟵
الاحتمالات المناظرة ⟵ (ح د(سر) = ١)

سر	٠	١	٢	المجموع
د(سر)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	١

وهذا الجدول يمثل التوزيع الاحتمالي للمثال التوضيحي السابق

مثال ١

إذا كان س متغيراً عشوائياً مداه {١، ٢، ٣} وكان:
ل(س = ١) = ٢م ، ل(س = ٢) = ٣م ، ل(س = ٣) = م
أوجد قيمة م

الحل

∵ س متغير عشوائي ∴ ح د(سر) = ١
∴ د(١) + د(٢) + د(٣) = ١ ∴ ٢م + ٣م + م = ١
٦م = ١ ⟸ م = $\frac{1}{6}$

حساب : ① الوسط الحسابي (التوقع) ← μ

② التباين ← σ^2 ③ الانحراف المعياري ← σ

س$_ر$	د(س$_ر$)	س$_ر$. د(س$_ر$)	س$_ر^2$. د(س$_ر$)
① المدى العمود الأول	② الاحتمالات العمود الثاني	① × ② ينتج العمود الثالث	① × ③ ينتج العمود الرابع
مجـ	١	Σ س$_ر$. د(س$_ر$) = μ	Σ س$_ر^2$. د(س$_ر$)

وبعد استكمال الجدول يكون :

* الوسط الحسابي μ = Σ س$_ر$. د(س$_ر$) ← يعني مجـ العمود الثالث
* التباين σ^2 = Σ س$_ر^2$. د(س$_ر$) − μ^2 ← يعني مجـ العمود الرابع − μ^2
* الانحراف المعياري σ = $+\sqrt{\text{التباين}}$
* معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu} \times 100\,\%$

مثال : إذا كان أحد المصانع ينتج نوعين من المصابيح أ ، ب وكان متوسط العمر لهما بالساعة ١٨٥٠ ، ١٥٨٠ وانحرافهما المعياري بالساعة ٢٥٠ ، ٢٣٠ على الترتيب احسب معامل الاختلاف لكل منهما ، ماذا تلاحظ ؟

الحل : معامل اختلاف أ = $\frac{٢٥٠}{١٨٥٠} \times ١٠٠\,\%$ = ١٣,٥١ ٪

معامل اختلاف ب = $\frac{٢٣٠}{١٥٨٠} \times ١٠٠\,\%$ = ١٤,٥٦ ٪

نلاحظ أن النوع ب أكثر تشتتاً من أ .

مثال ٣: إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي كالآتي:

س ر	٠	١	٢	٣
د(س ر)	٠,٣٥	٠,٤	م	٠,١

أوجد قيمة م ثم احسب كلاً من:

الوسط الحسابي - الانحراف المعياري - معامل الاختلاف

الحل:

∵ س متغير عشوائي

∴ مج د(س ر) = ١

٠,٣٥ + ٠,٤ + م + ٠,١ = ١

∴ م = ١ − ٠,٨٥ = ٠,١٥

س ر	د(س ر)	س ر · د(س ر)	س ر² · د(س ر)
٠	٠,٣٥	٠	٠
١	٠,٤	٠,٤	٠,٤
٢	٠,١٥	٠,٣	٠,٦
٣	٠,١	٠,٣	٠,٩
مج	١	١	١,٩

من الجدول المقابل: μ = ١

التباين σ^2 = ١,٩ − (١)² = ٠,٩

∴ الانحراف المعياري σ = $\sqrt{٠,٩}$ = ٠,٩٥

معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu}$ × ١٠٠٪ = $\frac{٠,٩٥}{١}$ × ١٠٠٪ = ٩٥٪

مثال ٤: إذا كان س متغيراً عشوائياً مداه {٠، ١، ٢} ودالة توزيعه الاحتمالي تتحدد بالعلاقة:

د(س) = $\frac{\text{م س}}{٦}$ فإن قيمة م = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

الحل:

مج د(س ر) = ١

∴ د(٠) + د(١) + د(٢) = ١

٠ + $\frac{\text{م}}{٦}$ + $\frac{\text{٢م}}{٦}$ = ١ ⟸ ٣م = ٦ ⟸ م = ٢