التوقعات المرئية في الرياضيات التطبيقية -3ث

مراجعة ليلة الامتحان

الإستاتيكا- الجزء الأول

من إعداد معلم الرياضيات

محمد ربيع عبد الوهاب

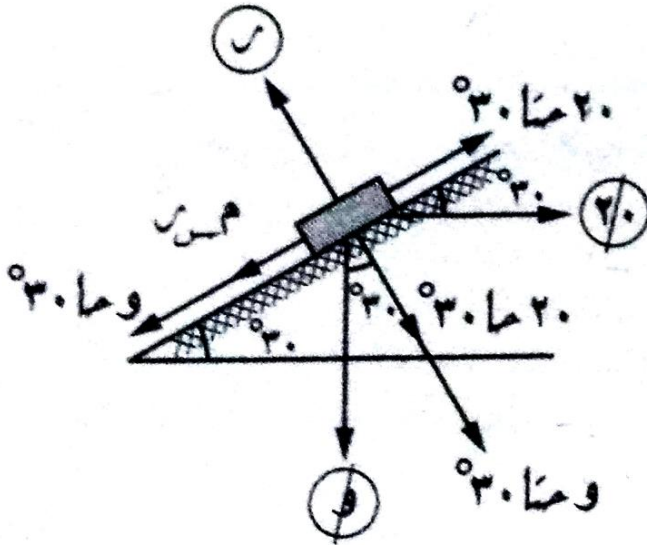
جسم كتلته ٢ كجم موضوع على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية ٣٠° أثرت على الجسم قوة أفقية مقدارها ٢٠ نيوتن فجعلته على وشك الحركة لأعلى المستوى.

عين: معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى.

دور أول 2019

Online الجمهورية
بوابة مؤسسة دار التحرير للطبع والنشر

الحل



و = ٢ × ٩,٨

= ١٩,٦ نيوتن

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى

∴ ر = ٢٠ جا ٣٠° + و جتا ٣٠°

∴ ر = ٢٠ جا ٣٠° + ١٩,٦ جتا ٣٠° = ١٠ + ٩,٨ √٣

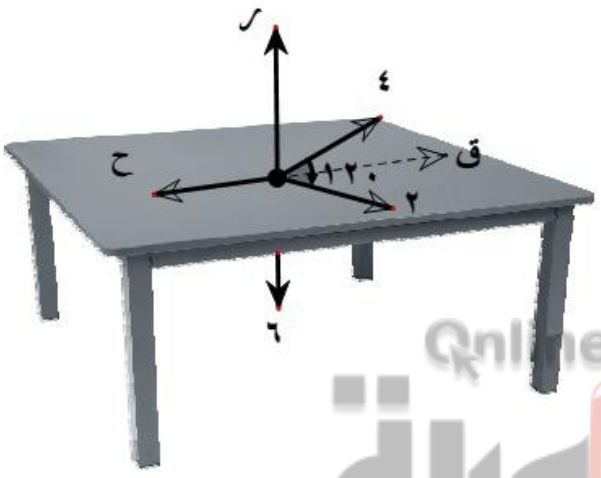
، ٢٠ جتا ٣٠° = م س ر + و جا ٣٠°

∴ ١٠ √٣ = م س × (١٠ + ٩,٨ √٣) + ١٩,٦ جا ٣٠°

∴ م س ≈ ٠,٢٧٨٨

2 وضع جسم مقدار وزنه ٦نيوتن على مستوى أفقى خشن و أثر عليه فى نفس المستوى قوتان مقدارهما ٢ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠ فظل ساكناً. أثبت أن زاوية الاحتكاك "ل" بين الجسم و المستوى يجب ألا تقل عن ٣٠°. و إذا كانت ل = ٤٥° و بقى اتجاه القوتين ثابتاً كما بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير. فعين مقدار القوة الأخرى لكى يكون الجسم على وشك أن يبدأ الحركة.

الحـــل



لتكن محصلة القوتين ٢ ، ٤ هى ق

∴ ق = $\sqrt{٢^٢ + ٤^٢ + ٢ \times ٢ \times ٤ \text{ جتا } ١٢٠}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن

لتكن قوة الإحتكاك ح ، ∵ الجسم متزن ⟸ ح = ق = ٢ $\sqrt{٣}$ ،

∵ ح ≤ م$_س$ ر ⟸ ٢ $\sqrt{٣}$ ≤ م$_س$ × ٦

∴ م$_س$ ≤ $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ⟸ ظا ل ≤ ظا ٣٠

∴ ل يجب أن لا تقل عن ٣٠°

عندما ل = ٤٥ ⟸ قوى الإحتكاك النهائى = ٦

∴ ٦^٢ = ٤^٢ + ق^٢ + ٢ × ٤ × ق جتا ١٢٠ ⟸ ق^٢ − ٤ ق − ٢٠ = ٠

∴ ق = $\frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^٢ - ٤ \times ١ \times (-٢٠)}}{٢ \times ١}$ ⟸ ق = ٢(١ + $\sqrt{٦}$) نيوتن.

Online الجمهورية
بوابة مؤسسة دار التحرير للطبع والنشر

3 تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ فى النقطة أ(−٣ , ٢) فإذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول كل من النقطتين ب(٣ , ١) ، جـ(−١ , ٤) يساوى ٢٨ $\overleftarrow{ع}$ إوجد $\overleftarrow{ق}$.

الحـــل

نفرض أن $\overleftarrow{ق}$ = (م , ن)

∵ $\overleftarrow{ج}_ب$ = $\overleftarrow{ج}_جـ$ = ٢٨ $\overleftarrow{ع}$ ⟸ $\begin{cases} \overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ق} = ٢٨ \overleftarrow{ع} \\ \overleftarrow{جـ أ} \times \overleftarrow{ق} = ٢٨ \overleftarrow{ع} \end{cases}$

∴ $\begin{cases} (-٦ , ١) \times (م , ن) = ٢٨ \overleftarrow{ع} \\ (-٢ , -٢) \times (م , ن) = ٢٨ \overleftarrow{ع} \end{cases}$ ⟸ $\begin{cases} -٦ن - م = ٢٨ \\ -٢ن + ٢م = ٢٨ \end{cases}$

$\therefore \left.\begin{array}{l} -٦ن - م = ٢٨ \\ -ن + م = ١٤ \end{array}\right\}$ بالجمع $\Leftarrow$ $-٧ن = ٤٢$

$\therefore$ $\boxed{ن = -٦}$ و بالتعويض فى أى من المعادلتين $\boxed{م = ٨}$ $\Leftarrow$ $\boxed{\overleftarrow{ق} = (٨ , -٦)}$

4 إذا كان عزم القوة $\overleftarrow{ق} = ٢\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ حول نقطة الأصل " و " يساوى $\overleftarrow{ع}_{و}$ حيث $\overleftarrow{ع}_{و} = -٥\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ و إذا كانت هذه القوة تمر بنقطة الاحداثى الصادى لها يساوى ٢. أوجد الإحداثى س ، ع للنقطة و كذلك أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة.

الحل

نفرض أن نقطة تأثير القوة أ (س ، ٢ ، ع)

$\because$ $\overleftarrow{ع}_{و} = -٥\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ $\Leftarrow$ $\overleftarrow{و أ} \times \overleftarrow{ق} = -٥\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$

$\therefore$ $\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ س & ٢ & ع \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = -٥\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ $\Leftarrow$ $\left\{\begin{array}{l} -٢ - ٣ع = -٥ \\ ٣س - ٤ = -١ \end{array}\right.$ $\Leftarrow$ $\left\{\begin{array}{l} ع = ١ \\ س = ١ \end{array}\right.$

$\because$ طول العمود $= \dfrac{\|\overleftarrow{ع}_{و}\|}{\|\overleftarrow{ق}\|} = \dfrac{\sqrt{٢٥+٩+١}}{\sqrt{٤+٩+١}} = \dfrac{١}{٢}\sqrt{١٠}$ وحدة طول

5 إذا كانت $\overleftarrow{ق} = -٢\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص} + ٥\overleftarrow{ع}$ تؤثر عند نقطة أ التي متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}$.

أوجد : عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة الأصل .

ثم أوجد: طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$. دور أول 2019

الحل

Online الجمهورية
بوابة مؤسسة دار التحرير للطبع والنشر

$\overleftarrow{ج}_و = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (١ ، -١ ، ١) \times (-٢ ، ٣ ، ٥)$

$$\therefore \overleftarrow{ج}_و = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١ & -١ & ١ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

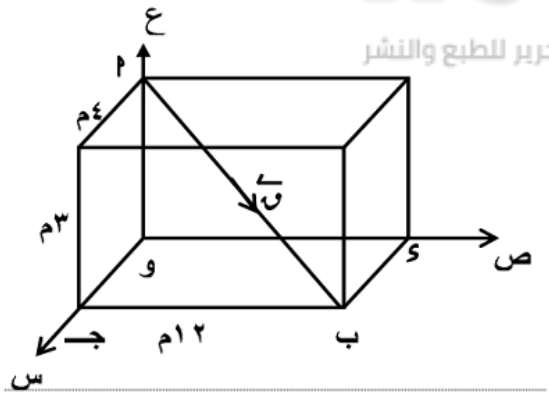
$$= -٨\overleftarrow{س} - ٧\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}$$

، طول العمود من نقطة الأصل

$$= \frac{\|\overleftarrow{ج}_و\|}{\|\overleftarrow{ق}\|} = \frac{\sqrt{(-٨)^٢ + (-٧)^٢ + (١)^٢}}{\sqrt{(-٢)^٢ + (٣)^٢ + (٥)^٢}}$$

$= \sqrt{٣}$ وحدة طول

Online
الجمهورية
بوابة مؤسسة دار التحرير للطبع والنشر



6 فى الشكل المقابل:

قوة $\overleftarrow{ق}$ مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر فى القطر

$\overline{أ ب}$ فى متوازى مستطيلات ابعاده ٣ م ، ٤م ، ١٢م

كما بالشكل أوجد عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول النقطة ء

الحـــــل

أ(٠ ، ٠ ، ٣) ، ب(٤ ، ١٢ ، ٠) ، ء (٠ ، ١٢ ، ٠) ∴ $\overleftarrow{أب}$ = (٤ ، ١٢ ، -٣)

، $\overleftarrow{ءأ}$ =(٠ ، -١٢ ، ٣) ∴ $\overleftarrow{ق}$ = ١٣٠ × $\frac{(٤ ، ١٢ ، -٣)}{\sqrt{٩+١٦+١٤٤}}$ = (٤٠ ، ١٢٠ ، -٣٠)

$$\therefore \overleftarrow{\text{جـ}}_{\text{ء}} = \overleftarrow{\text{ء أ}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = (٠ ، -١٢ ، ٣) \times (٤٠ ، ١٢٠ ، -٣٠) = \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ ٠ & -١٢ & ٣ \\ ٤٠ & ١٢٠ & -٣٠ \end{vmatrix}$$

$$= ١٢٠ \overleftarrow{\text{ص}} + ٤٨٠ \overleftarrow{\text{ع}}$$

7 أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ رسم $\overleftarrow{\text{ءهـ}} \perp \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ يقطعه فى هـ ، اثرت القوة $\text{ق}_١$ ، $\text{ق}_٢$ ، $\text{ق}_٣$ فى أضلاع المثلث فإذا كانت محصلة هذه القوة تساوى $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن وخط عملها $\overleftarrow{\text{ءهـ}}$ أوجد هذه القوة مقدارا واتجاها

الحـــــل

ب هـ = ١٠ جتا ٦٠ = ٥ سم ، ∴ هـ جـ = ١٥ سم، ءهـ = $٥\sqrt{٣}$ سم

، ارتفاع المثلث = ٢٠ جا ٦٠ = $١٠\sqrt{٣}$ سم

∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة = عزم المحصلة حول نفس النقطة

∴ باخذ العزوم حول ب ∴ $١٢\sqrt{٣} \times ٥ = \text{ق}_٢ \times ١٠\sqrt{٣}$

∴ $\text{ق}_٢$ = ٦ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أجـ}}$

بالمثل باخذ العزوم حول جـ ∴ $-١٢\sqrt{٣} \times ١٥ = \text{ق}_١ \times ١٠\sqrt{٣}$

∴ $\text{ق}_١$ = ١٨ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$

باخذ العزوم حول أ

∴ $\text{ق}_٣ \times ١٠\sqrt{٣} = -١٢\sqrt{٣} \times ٥$ ∴ $\text{ق}_٣$ = ٦ نيوتن وتعمل فى $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

Online الجمهورية
نوفية مؤسسة دار التحرير للطبع والنشر